

121 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Φροντιστηριακές Ασκήσεις #3, 30-10-18
ΤΜΗΜΑ Α

1) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν πίνακες P και Q ώστε

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Να δείξετε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για τους $n \times n$ πίνακες A και B .

- α) Ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος.
- β) Οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι.
- γ) $\text{rank}A = \text{rank}B = n$.

3) Δύο τετραγωνικοί $m \times m$ πίνακες A και B καλούνται όμοιοι, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Γ ώστε $B = \Gamma A \Gamma^{-1}$. Να δείξετε ότι αν οι $m \times m$ πίνακες A και B είναι όμοιοι, τότε και οι A^k και B^k είναι επίσης όμοιοι.

- 4) α) Ισχύει ότι $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- β) Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος.

5) Υπάρχουν πραγματικοί r και s ώστε η βαθμίδα του πίνακα A να είναι ένα ή δύο; Αν υπάρχουν να τις βρείτε.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6) Να βρεθούν οι τιμές του a ώστε οι επόμενοι πίνακες να έχουν ορίζουσα 0.

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 0 & a-4 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

7) Να υπολογισθούν οι ορίζουσες

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \kappa \\ -1 & 0 & 3 & \dots & \kappa \\ -1 & -2 & 0 & \dots & \kappa \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{pmatrix}.$$

8) Να δείξετε ότι ο $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ έχει $\text{rank} 1$ ανν κάποια από τις επόμενες ορίζουσες είναι μη-μηδενική. $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Ακολούθως να δείξετε ότι τα σημεία $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία ο πίνακας $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & x & y \end{pmatrix}$ έχει βαθμίδα 1 ικανοποιούν τις εξισώσεις $x = t, y = t^2, z = t^3$.